Τάξη: Α΄

Παραλληλόγραμμα και τραπέζια: Δύο είδη τετραπλεύρων με ιδιαίτερη χρησιμότητα και ιδιότητες

Στέργιος Τουρναβίτης

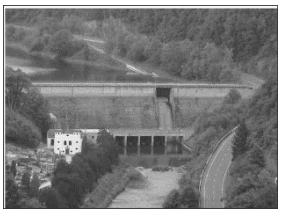
Ίσως μόλις φθάσατε στο κεφάλαιο 5 ή στο αντίκρυσμα αυτής της εργασίας να αναρωτηθείτε. Δεν μας έφθαναν τα τρίγωνα, τα κριτήρια ισότητας, έχουμε τώρα και αυτές τις δύο ιδιαίτερες περιπτώσεις τετραπλεύρων; Ωστόσο «πήραμε μία γεύση» από τη χρησιμότητα των παραλληλογράμμων αλλά και των τραπεζίων, τριγώνων, στον υπολογισμό των εμβαδών από το Γυμνάσιο, με τα οποία εμβαδά θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στην επόμενη τάξη. Ακόμη όμως και για τον υπολογισμό εμβαδών παραλληλογράμμων, χρειάζεται να γνωρίζουμε περισσότερα για τη φύση και τη σχέση των πλευρών, των γωνιών τους, τις ιδιότητες και τα κριτήρια.

Σκοπός λοιπόν αυτού εδώ του κειμένου είναι να αναδείξει την αξία των ιδιοτήτων και των κριτηρίων, των κάθε φύσης παραλληλογράμμων και τραπεζίων, μέσα από την εξάσκηση σε αποδεικτικές διαδικασίες στην επίλυση των παρατιθέμενων ασκήσεων, όπου απαιτούνται ιδιαίτατα, τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και ορθογωνίων τριγώνων, από τις προηγούμενες ενότητες. Οι ασκήσεις είναι φυσικό στις 4 σελίδες ενός περιοδικού, να καλύπτουν ένα μικρό ποσοστό της «γκάμας» των θεμάτων στα παραλληλόγραμμα, παρόλα αυτά είναι ένα καλό αρχικό βήμα στην ανάπτυξη μεθοδολογίας και αύξηση της αυτοεκτίμησης γενικότερα, στην αντιμετώπιση γεωμετρικών προβλημάτων.

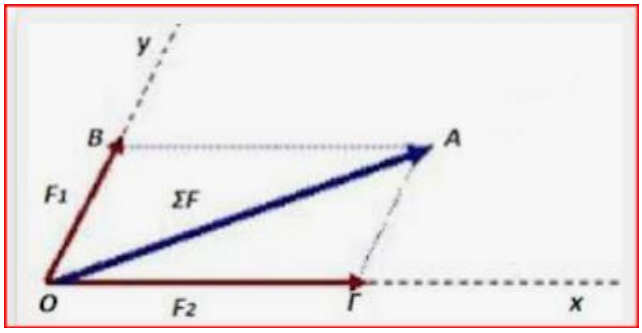
Αρχίζουμε με μερικές εικόνες παραλληλογράμμων και τραπεζίων που είναι ενσωματωμένα σε διάφορες κατασκευές, αποτελούν πηγή έμνευσης στη ζωγραφική κ.ά.:

Πίνακας ζωγραφικής
με γεωμετρικά σχήματα

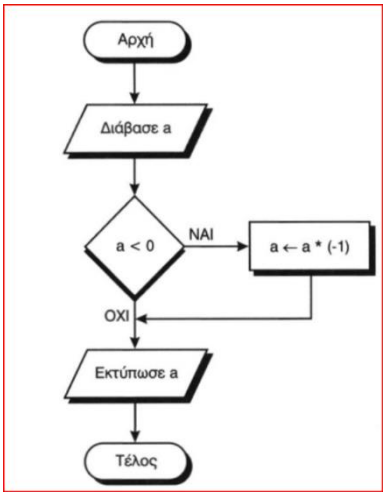
Κτίρια



Υδροηλεκτρικό φράγμα
διακρίνεται στο πάνω μέρος του φράγματος,
ο αγωγός υπερχείλισης (το μαύρο παραλληλόγραμμο)

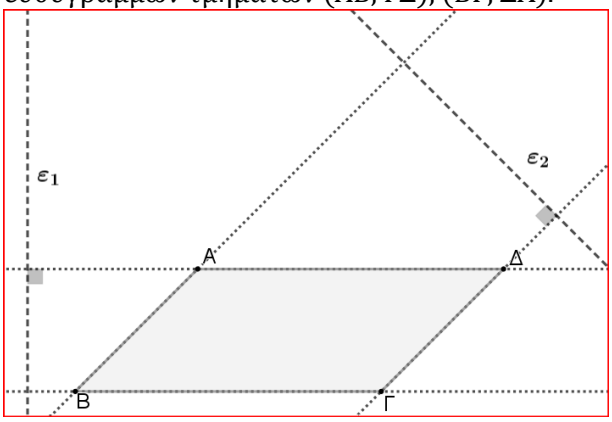


Σύνθεση δύο δυνάμεων
με τον κανόνα του παραλληλογράμμου



Λογικό διάγραμμα, σχεδιασμένο
με πρόγραμμα γραφικών υπολογιστή.

Το παραλληλόγραμμο είναι το σχήμα ΑΒΓΔ που ορίζεται από δύο ζεύγη παράλληλων ευθυγράμμων τμημάτων (ΑΒ, ΓΔ), (ΒΓ, ΔΑ).

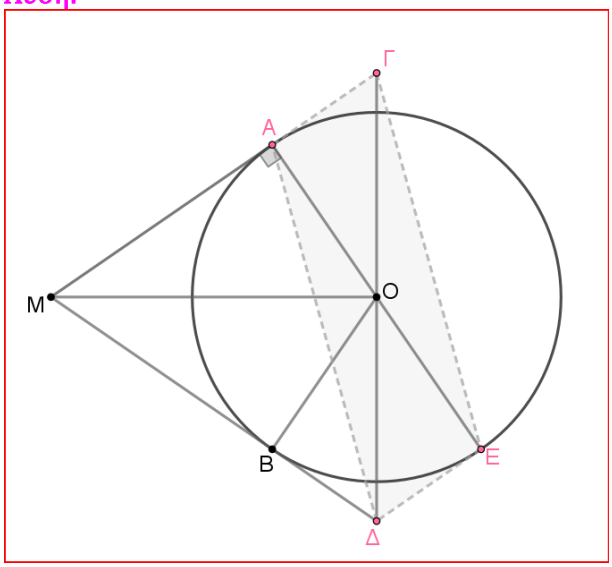


Ένας τρόπος για να το κατασκευάσουμε είναι να πάρουμε αυτά τα παράλληλα τμήματα σε δύο ζεύγη παράλληλων ευθειών. Αυτά τα δύο ζεύγη των δύο απέναντι τμημάτων, βρίσκονται σε ευθείες που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία, άρα μεταξύ τους ανά δύο είναι παράλληλα, αντίστοιχα.

Άσκηση 1

Από σημείο Μ εκτός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ και ΜΒ αυτού. Η διάμετρος του κύκλου, που είναι κάθετη στην ΟΜ, τέμνει τις ευθείες ΜΑ και ΜΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Η ευθεία ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ, Ε είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Λύση:



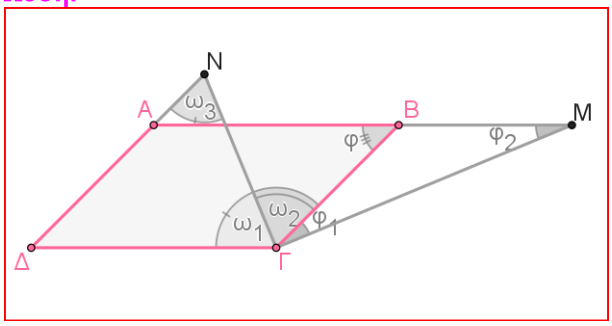
Στο σχήμα εντοπίζουμε ένα τετράπλευρο ΑΓΕΔ του οποίου οι διαγώνιοι διχοτομούνται. (γιατί;)
Άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Όμως $\text{ΑΓ} \perp \text{ΑΟ}$ και επειδή $\text{ΔΕ} \,//\, \text{ΑΓ}$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, θα είναι και $\text{ΔΕ} \perp \text{ΟΕ}$ όπου η ΟΕ είναι στην προέκταση της ΑΟ.
Επειδή τώρα η ΔΕ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΕ του κύκλου στο σημείο Ε, η ΔΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο,ΟΕ) με σημείο επαφής το Ε.

Άσκηση 2

Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημείο Μ με ΒΜ=ΒΓ, ενώ στην προέκταση της ΔΑ παίρνουμε σημείο Ν με ΔΝ=ΔΓ. Είναι οι ευθείες ΜΓ, ΓΝ κάθετες;

Λύση:



Για την απάντηση στο ερώτημα, προχωράμε από αυτό που θέλουμε να διερευνήσουμε υποθέτοντας ότι ισχύει και με σχέσεις γωνιών που προκύπτουν από το σχήμα, τα δεδομένα της άσκησης και φυσικά τη θεωρία, καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει αντικειμενικά.
Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\text{ΝΓ̂Μ} = 1\,\text{L} \text{ ή } \hat{\varphi}_1 + \hat{\omega}_2 = 1\,\text{L} \text{ ή } 2\hat{\varphi}_1 + 2\hat{\omega}_2 = 2\,\text{L}$$

$\hat{\varphi}$ $\quad$ ΔΓ̂Β

Όμως $\hat{\varphi} + \text{ΔΓ̂Β} = 2\,\text{L}$ (γιατί;)

Προηγουμένως αντικαταστήσαμε τη $2\hat{\varphi}_1$ με την γωνία $\hat{\varphi}$ και την $2\hat{\omega}_2$ με την γωνία ΔΓ̂Β (γιατί;)
Επομένως αφού η τελευταία ισότητα είναι αληθής, θα ισχύει και ότι, οι ευθείες ΓΜ και ΓΝ είναι κάθετες.

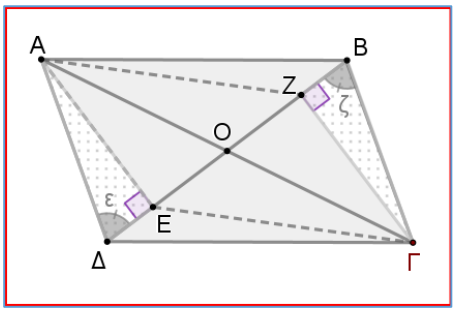
Άσκηση 3

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τις προβολές Ε και Ζ των κορυφών Α και Γ αντίστοιχα πάνω στη διαγώνιο ΒΔ. Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ.

Λύση:

Εκτός από το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, υπάρχει και ένα τετράπλευρο που έχει μία κοινή διαγώνιο με αυτό και η άλλη διαγώνιός

του είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ, για το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε ότι διχοτομείται από την ΑΓ.

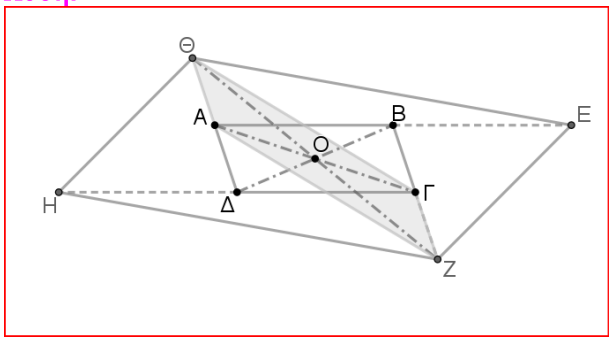


Αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και θα συμβαίνει αυτό που είπαμε, δηλαδή ότι η διαγώνιός του ΑΓ να διχοτομεί την άλλη διαγώνιό του ΕΖ.
Παρατηρούμε επίσης από το σχήμα σύμφωνα και με την υπόθεση της άσκησης, ότι ΑΕ//ΓΖ, ως κάθετες στην ΒΔ. Αρκεί επομένως να αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας τα κριτήρια των παραλληλογράμμων (ποιο συγκεκριμένα;) ότι εκτός από παράλληλες οι ΑΕ και ΓΖ είναι και ίσες.
Αυτό προκύπτει εύκολα από τα δύο ορθογώνια τρίγωνα, ΑΕΔ και ΓΖΒ τα οποία είναι ίσα. (γιατί;)
Ο τελικός επίλογος της άσκησης είναι να γράψουμε σύμφωνα με τα κριτήρια των παραλληλογράμμων, ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ έχει δύο απέναντι πλευρές ΑΕ, ΓΖ παράλληλες και ίσες, επομένως είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΕΖ, διχοτομούνται.

Άσκηση 4

Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ=ΑΒ, ΓΖ=ΒΓ, ΔΗ=ΓΔ, ΑΘ=ΑΔ αντίστοιχα.
α) Είναι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμο;
β) Έχει το ίδιο κέντρο με το ΑΒΓΔ;

Λύση:

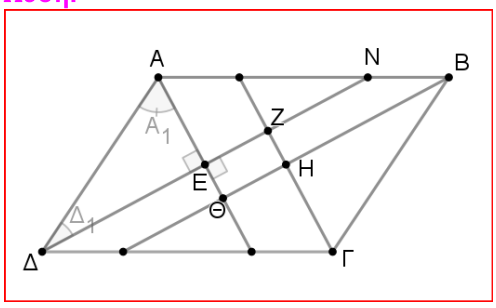


α) Από τα ίσα τρίγωνα ΘΑΕ και ΖΓΗ (γιατί;) έχουμε ΘΕ=ΖΗ. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι ΘΗ=ΖΕ.
Άρα το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (γιατί;)
β) Αν φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΘΓ και ΑΖ, σχηματίζεται ένα τετράπλευρο ΑΘΓΖ που οι απέναντι πλευρές του ΑΘ και ΓΖ είναι από την υπόθεση ίσες προεκτάσεις των ίσων και παράλληλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, αντίστοιχα.
Άρα είναι και αυτό παραλληλόγραμμο.
Επιπλέον οι δύο διαγώνιοι ΘΖ, ΑΓ αυτού του παραλληλογράμμου είναι ταυτόχρονα η μεν ΘΖ διαγώνιος και του ΘΕΖΗ, η δε ΑΓ διαγώνιος και του ΑΒΓΔ.
Επομένως το μέσο Ο της ΑΓ, είναι ταυτόχρονα και κέντρο του ΑΒΓΔ, ενώ το ίδιο σημείο ως μέσο της ΘΖ, θα είναι και κέντρο του ΕΖΗΘ.
Άρα τα δύο παραλληλόγραμμα έχουν το ίδιο κέντρο.

Άσκηση 5

α$_1$) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διχοτόμοι δύο διαδοχικών του γωνιών είναι κάθετες ενώ οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών του είναι παράλληλες.
α$_2$) Τι είδους τετράπλευρο σχηματίζεται από τις διχοτόμους ενός παραλληλογράμμου οι οποίες τέμνονται ανά δύο σε διαφορετικά σημεία;
β) Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διχοτόμοι των γωνιών του τεμνόμενες ανά δύο σε διαφορετικά σημεία, σχηματίζουν τετράγωνο.

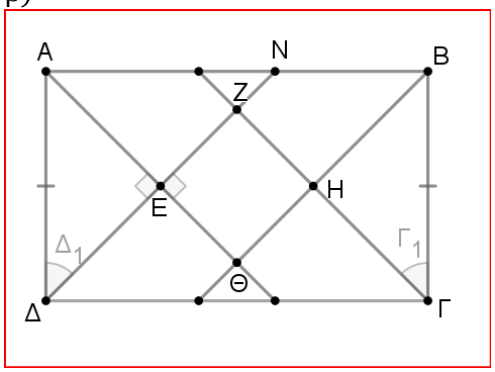
Λύση:



α$_1$) Για να δείξουμε ότι οι διχοτόμοι δύο διαδοχικών γωνιών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ είναι κάθετες, αρκεί να δείξουμε ότι η γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΑΕΔ, είναι ορθή. Το ίδιο βέβαια θα συμβαίνει και με την κατακορυφήν της Ε που είναι μία από τις τέσσερις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ.
Έχουμε ότι: $\hat{A}+\hat{\Delta}=180^o$ (γιατί;)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=90^o\\ \hat{A}_1=\frac{\hat{A}}{2}\\ \hat{\Delta}_1=\frac{\hat{\Delta}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{\Delta}_1=90^o$$

Επομένως από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΕΔ ισχύει ότι $\hat{E}=90^o$.
Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι διχοτόμοι των επίσης διαδοχικών γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, είναι επίσης κάθετες.
Ναι, αλλά αφού οι διχοτόμοι των δύο απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία που δεν είναι άλλη από τη διχοτόμο της $\hat{A}$, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
α_2) Έχουμε αποδείξει για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΘΗΖ από το προηγούμενο ερώτημα ότι $\hat{E}=\hat{\Theta}=90^o$ από την καθετότητα των διχοτόμων των διαδοχικών γωνιών $\hat{\Delta}$, $\hat{A}$ και $\hat{A}$, $\hat{B}$. Το ίδιο συμβαίνει και με τις διχοτόμους των επίσης διαδοχικών γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Άρα και η γωνία $\hat{Z}$ είναι ορθή.
Επομένως το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (γιατί;)
β)



Έχουμε αποδείξει από το προηγούμενο ερώτημα α_2), ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αφού και στην περίπτωση του προκειμένου ερωτήματος β), το ΑΒΓΔ ως ορθογώνιο είναι και παραλληλόγραμμο, ώστε να ισχύουν για αυτό οι υποθέσεις και το συμπέρασμα του προηγουμένου ερωτήματος.
Επομένως το μόνο που μένει να αποδείξουμε για το τετράπλευρο ΕΖΗΘ, ότι είναι και ρόμβος που σημαίνει «ορθογώνιο + ρόμβος = τετράγωνο». Αυτό μεταφράζεται στο να επιλέξουμε δύο διαδοχικές πλευρές π.χ. τις ΕΖ, ΖΗ και να επιβεβαιώσουμε την αλήθεια της αισθητικής μας αντίληψης, ότι είναι ίσες.
Παρατηρούμε από το σχήμα ότι:

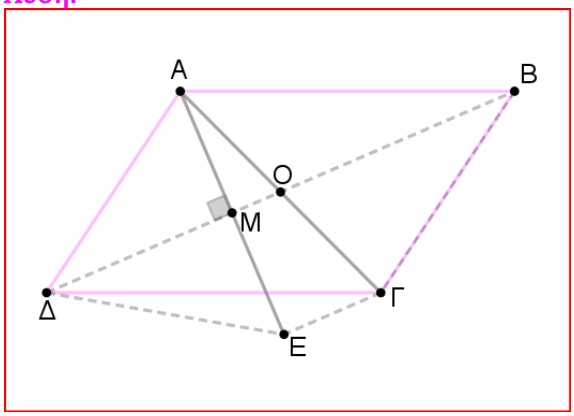
$$ΕΖ = ΔΖ - ΔΕ \text{ και } ΗΖ = ΓΖ - ΓΗ$$

Όμως $ΔΖ = ΓΖ$ από το ισοσκελές τρίγωνο ΔΖΓ(γιατί;) και $ΔΕ = ΓΗ$ από την ισότητα των ορθογωνίων και ισοσκελών τριγώνων ΑΕΔ και ΒΗΓ. (γιατί;)
Επομένως $ΕΖ = ΗΖ$ (ως διαφορές ίσων τμημάτων).
Αυτό σημαίνει ότι το ΕΖΗΘ εκτός από ορθογώνιο είναι και ρόμβος, άρα τετράγωνο.

Άσκηση 6

Σ' ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ βρίσκουμε το συμμετρικό Ε της κορυφής του Α ως προς τη διαγώνιο ΒΔ. Τι είδους αποδεικτική διαδικασία πρέπει να ακολουθήσουμε για το είδος του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ;

Λύση:



ΔΕ=ΔΑ επειδή το ΑΔΕ είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο. (γιατί;)
Όμως ΔΑ=ΓΒ, άρα και ΔΕ=ΒΓ.
Στο τρίγωνο ΕΑΓ η ΜΟ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΕ, ΑΓ, Μ και Ο αντίστοιχα, άρα ΜΟ // ΕΓ επομένως και ΔΒ // ΕΓ.
Έχουμε επομένως ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες ΔΒ // ΕΓ και τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες ΔΕ=ΒΓ. Επομένως είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο.

Βιβλιογραφία: Ευκλείδια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου ΟΕΔΒ 1999, Θωμαΐδης Γιάννης, Ξένος Θανάσης, Παντελίδης Γεώργιος, Πούλος Ανδρέας, Στάμου Γεώργιος.